

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Γενική μορφή πολωνύμου με μεταβλητή x :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

2.

Σταθερό πολωνύμο : Κάθε πραγματικός αριθμός

3.

Μηδενικό πολωνύμο : Ο αριθμός 0

4.

Ίσα πολωνύμα : Ίσοι οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων.

5.

Συνθήκη : $P(x) = 0 \Leftrightarrow$ όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι 0.

6.

Βαθμός πολωνύμου : Ο μέγιστος εκθέτης της μεταβλητής του.

7.

Προσοχή. Το μηδενικό πολωνύμο δεν έχει βαθμό.
Κάθε άλλο σταθερό πολωνύμο έχει βαθμό 0.

8.

Αριθμητική τιμή πολωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho)$.

9.

Συνθήκη : $P(\rho) = Q(\rho)$ για κάθε $\rho \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$

10.

Ο βαθμός του γινομένου δύο πολωνύμων είναι το άθροισμα των βαθμών τους.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Πολυώνυμο – Συνάρτηση

Κάθε πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση. (Πολυωνυμική συνάρτηση)
Όχι αντίστροφα.

2.

Παρατήρηση

Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίδιο βαθμό. Όχι αντίστροφα.

3.

Μια χρήσιμη ισοδυναμία

$P(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho$ είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$

4.

Μέθοδος

Για να διαπιστώσουμε ότι κάποιος αριθμός α είναι ρίζα πολωνύμου $P(x)$, πρέπει να αποδείξουμε ότι $P(\alpha) = 0$

5.

Μέθοδος

Για να βρούμε τις ρίζες πολωνύμου $P(x)$, λύνουμε την εξίσωση $P(x) = 0$

6.

Μέθοδος

Αν ο συντελεστής του **μεγιστοβάθμιου (φαινομενικά) όρου** περιέχει παράμετρο, τότε για να βρούμε τον βαθμό εξετάζουμε περιπτώσεις. (Άσκηση 2)

7.

Αποδεικνύεται ότι

Το πλήθος των πραγματικών ριζών μη μηδενικού πολωνύμου είναι $\leq$ από το βαθμό του.

Διαφορετικά πρόκειται για το μηδενικό πολυώνυμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε ο αριθμός 1 να είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + \lambda^2 x^3 - 5\lambda x^2 + 2x + 3$$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 3

$$\text{Ρίζα του } P(x) \text{ το } 1 \Leftrightarrow P(1) = 0$$

$$1^4 + \lambda^2 \cdot 1^3 - 5\lambda \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$1 + \lambda^2 - 5\lambda + 2 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = 3.$$

2.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^3 - 4\kappa)x^4 + (\kappa^2 - 2\kappa)x^2 - 3\kappa + 6$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Για τις διάφορες τιμές του κ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

$$\bullet \quad \text{Όταν } \kappa^3 - 4\kappa \neq 0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa^2 - 4) \neq 0$$

$$\kappa(\kappa - 2)(\kappa + 2) \neq 0$$

$$\kappa \neq 0 \quad \text{και} \quad \kappa \neq 2 \quad \text{και} \quad \kappa \neq -2$$

τότε το $P(x)$ είναι 4^{ον} βαθμού

$$\bullet \quad \text{Όταν } \kappa^3 - 4\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa^2 - 4) = 0$$

$$\kappa(\kappa - 2)(\kappa + 2) = 0$$

$$\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = 2 \quad \text{ή} \quad \kappa = -2$$

α) Για $\kappa = 0$, το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 6$ που είναι βαθμού 0.

β) Για $\kappa = 2$, το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 0$ που δεν έχει βαθμό

γ) Για $\kappa = -2$, το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 8x^2 + 12$ που είναι βαθμού 2.

3.

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = (\alpha - 2)x^3 + (\alpha^2 - 2\alpha)x + \alpha^3 - 4\alpha \quad \text{να είναι το μηδενικό πολυώνυμο}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } \alpha - 2 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha^2 - 2\alpha = 0 \quad \text{και} \quad \alpha^3 - 4\alpha = 0.$$

$$\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\text{Για } \alpha = 2 \quad \text{είναι} \quad \alpha^2 - 2\alpha = 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{και} \quad \alpha^3 - 4\alpha = 2^3 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$$

Άρα η ζητούμενη τιμή είναι $\alpha = 2$.

4.

Να βρείτε τις τιμές των κ και λ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\kappa - 1)x^3 - (6\kappa + 3\lambda)x^2 + \lambda - 2, \quad Q(x) = 3x^2 - (\kappa - 1)x + 2\lambda + 1$$

Προτεινόμενη λύση

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - 1 = 0 \\ -(6\kappa + 3\lambda) = 3 \\ -(\kappa - 1) = 0 \\ \lambda - 2 = 2\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 2\kappa + \lambda = -1 \\ \kappa = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 \\ 2 \cdot 1 + (-3) = -1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 \\ 2 - 3 = -1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

5.

Έστω τα πολυώνυμα :

$$P(x) = x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 - \alpha x + 4 \quad \text{και} \quad Q(x) = x^2 - (\alpha - \beta)x + 3\beta - 1.$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε :

το 1 να είναι ρίζα του $P(x)$ και να ισχύει $Q(2) = 11$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει} \quad P(1) = 0 \quad \text{και} \quad Q(2) = 11$$

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - (2\alpha + \beta) \cdot 1^2 - \alpha \cdot 1 + 4 = 0$$

$$1 - (2\alpha + \beta) - \alpha + 4 = 0$$

$$1 - 2\alpha - \beta - \alpha + 4 = 0$$

$$3\alpha + \beta = 5 \quad (1)$$

$$Q(2) = 11 \Leftrightarrow 2^2 - (\alpha - \beta) \cdot 2 + 3\beta - 1 = 11$$

$$4 - 2\alpha + 2\beta + 3\beta - 1 = 11$$

$$-2\alpha + 5\beta = 8 \quad (2)$$

$$\text{Σύστημα των (1), (2)} \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{και} \quad \beta = 2$$

6.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - x - 2$.

Να βρείτε τα α, β και πολυώνυμο $B(x)$ έτσι, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $P(x) = (x^3 - \beta x + 1)B(x)$

Προτεινόμενη λύση

Το ζητούμενο πολυώνυμο $B(x)$ θα είναι πρώτου βαθμού (αφού πολλαπλασιαζόμενο με το $x^3 - \beta x + 1$ δίνει το $P(x)$ που έχει βαθμό (4), άρα $B(x) = \kappa x + \lambda$ με $\kappa \neq 0$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι} \quad P(x) = (x^3 - \beta x + 1)B(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - x - 2 = (x^3 - \beta x + 1)(\kappa x + \lambda)$$

$$x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - x - 2 = \kappa x^4 + \lambda x^3 - \beta \kappa x^2 - \beta \lambda x + \kappa x + \lambda$$

$$x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - x - 2 = \kappa x^4 + \lambda x^3 - \beta \kappa x^2 - (\beta \lambda - \kappa)x + \lambda$$

$$1 = \kappa \quad \text{και} \quad -2 = \lambda \quad \text{και} \quad \alpha = -\beta \kappa \quad \text{και} \quad 1 = \beta \lambda - \kappa \quad \text{και} \quad -2 = \lambda$$

$$\kappa = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = -2 \quad \text{και} \quad \alpha = -\beta \cdot 1 \quad \text{και} \quad 1 = \beta(-2) - 1$$

$$\kappa = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = -2 \quad \text{και} \quad \alpha = -\beta \quad \text{και} \quad 2 = \beta(-2)$$

$$\kappa = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = -2 \quad \text{και} \quad \alpha = -\beta \quad \text{και} \quad \beta = -1$$

$$\kappa = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = -2 \quad \text{και} \quad \alpha = 1 \quad \text{και} \quad \beta = -1$$

7.

Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα της μορφής $f(x) = ax^2 + 5x + \gamma$, $a \neq 0$ για τα οποία ισχύει $f(x+1) = f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+1) = f(-x)$

$$a(x+1)^2 + 5(x+1) + \gamma = a(-x)^2 + 5(-x) + \gamma$$

$$a(x^2 + 2x + 1) + 5x + 5 + \gamma = ax^2 - 5x + \gamma$$

$$ax^2 + 2ax + a + 5x + 5 + \gamma = ax^2 - 5x + \gamma$$

$$2ax + a + 5x + 5 + \gamma = -5x + \gamma$$

$$(2a + 5)x + a + 5 + \gamma = -5x + \gamma$$

$$2a + 5 = -5 \quad \text{και} \quad a + 5 + \gamma = \gamma$$

$$2a = -10 \quad \text{και} \quad a = -5$$

$$a = -5 \quad \text{και} \quad a = -5$$

$$a = -5$$

Άρα τα ζητούμενα πολυώνυμα είναι $f(x) = -5x^2 + 5x + \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$

8.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\sin 2\theta - 1)x^2 + 3(\eta\mu\theta)x - 1$. Να βρείτε τις τιμές του θ ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το 1.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Το } 1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - (\sin 2\theta - 1) \cdot 1^2 + 3(\eta\mu\theta) \cdot 1 - 1 = 0$$

$$1 - (\sin 2\theta - 1) + 3\eta\mu\theta - 1 = 0$$

$$1 - \sin 2\theta + 1 + 3\eta\mu\theta - 1 = 0$$

$$- \sin 2\theta + 1 + 3\eta\mu\theta = 0$$

$$- (1 - 2\eta\mu^2\theta) + 3\eta\mu\theta + 1 = 0$$

$$-1 + 2\eta\mu^2\theta + 3\eta\mu\theta + 1 = 0$$

$$\eta\mu\theta (2\eta\mu\theta + 3) = 0$$

$$\eta\mu\theta = 0 \quad \text{ή} \quad 2\eta\mu\theta + 3 = 0$$

$$\eta\mu\theta = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\theta = -\frac{3}{2}$$

- $\eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \kappa\pi \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu\theta = -\frac{3}{2}$ αδύνατη, αφού $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$

9.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\sin \alpha)x^3 + (\eta\mu^2\alpha)x^2 - 7x + 4\sin \alpha + 7$.

Αν $P(\sin \alpha) = 5$ και $-\pi < \alpha < \pi$, να βρείτε το α .

Προτεινόμενη λύση

$$P(\sin \alpha) = 5 \Leftrightarrow \sin \alpha \sin^3 \alpha + \eta\mu^2 \alpha \sin^2 \alpha - 7\sin \alpha + 4\sin \alpha + 7 = 5$$

$$\sin^4 \alpha + \eta\mu^2 \alpha \sin^2 \alpha - 3\sin \alpha + 2 = 0$$

$$\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha) - 3\sin \alpha + 2 = 0$$

$$\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha + 2 = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε $\sin \alpha = 1$ ή $\sin \alpha = 2$

- $\sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $\sin \alpha = 2$ αδύνατη, αφού $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

10.

Να προσδιορίσετε πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2, 3\} \text{ ισχύει } \frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

$$2x+3 = \alpha(x-3) + \beta(x-2)$$

$$2x+3 = \alpha x - 3\alpha + \beta x - 2\beta$$

$$2x+3 = (\alpha + \beta)x - 3\alpha - 2\beta$$

$$2 = \alpha + \beta \quad \text{και} \quad 3 = -3\alpha - 2\beta$$

$$\alpha = 2 - \beta \quad \text{και} \quad 3 = -3\alpha - 2\beta$$

$$\alpha = 2 - \beta \quad \text{και} \quad 3 = -3(2 - \beta) - 2\beta$$

$$\alpha = 2 - \beta \quad \text{και} \quad 3 = -6 + 3\beta - 2\beta$$

$$\alpha = 2 - \beta \quad \text{και} \quad 3 = -6 + \beta$$

$$\alpha = 2 - \beta \quad \text{και} \quad \beta = 9$$

$$\alpha = 2 - 9 \quad \text{και} \quad \beta = 9$$

$$\alpha = -7 \quad \text{και} \quad \beta = 9$$